E.N.S.I. Option TA 1984

# PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

---

Soit $I = [0, 1]$, $\sigma$ une subdivision de $I$, $\sigma = \{ 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} = 1 \}$ ; l'espace des fonctions continues sur $I$ est noté Cont $[0, 1]$. Pour $f \in$ Cont $[0, 1]$ on définit $\| f \| = \text{Max} \{ | f(x) | \; x \in I \}$. Notons $S_{p_1}(I, \sigma)$ le sous-espace de Cont $[0, 1]$ dont la restriction à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1$ à $n$, est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

1° Montrer que $S_{p_1}(I, \sigma)$ est un sous-espace vectoriel de Cont $[0, 1]$.

2° On considère les $n + 1$ fonctions suivantes définies sur $I$ :

$C_1(x) = \dfrac{t_2 - x}{t_2 - t_1}$ pour $x \in [t_1, t_2]$, 0 ailleurs,

$C_{n+1}(x) = \dfrac{x - t_n}{t_{n+1} - t_n}$ pour $x \in [t_n, t_{n+1}]$, 0 ailleurs,

pour $i = 1$ à $n - 1$ : $C_{i+1}(x) = \dfrac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i}$ pour $x \in [t_i, t_{i+1}]$ et

$$C_{i+1}(x) = \frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} \text{ pour } x \in [t_{i+1}, t_{i+2}], \; 0 \text{ ailleurs.}$$

Tracer $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_n$, $C_{n+1}$ sur une même figure.

Montrer que les $C_i$, $i = 1$ à $n + 1$, forment une base de $S_{p_1}(I, \sigma)$.

3° En déduire qu'elles forment une partition de l'unité, i.e. que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_i(x) = 1 \text{ et que } C_i(x) \geqslant 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } n + 1.$$

4° On se donne $S \in S_{p_1}(I, \sigma)$, soit $S(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i C_i(x)$; en considérant dans un repère orthonormé le point courant de $\mathbb{R}^2$ : $M(x) = (x, S(x))$ où $x \in [0, 1]$, montrer qu'il peut s'écrire :

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i C_i(x) \text{ où } A_i \text{ est un vecteur à déterminer.}$$

5° Soient $b_i$, $i = 1$ à $n + 1$, des points de $\mathbb{R}^2$, définissons la courbe paramétrée :

$$M(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i C_i(t)$$

où $t$ parcourt $I$ muni de la subdivision $\sigma$.

Quelle est la nature de cette courbe ? Faites un dessin dans le cas où $n = 3$ et $b_1 = b_4$.

.../...

6° Cont [0, 1] est muni du produit scalaire $(.,.)$ défini par $(g, h) = \int_0^1 g(x)\, h(x)\, dx$ et de la norme associée $\| . \|_2$, $\| g \|_2 = (g, g)^{1/2}$.

Pour $g$ donnée dans Cont [0, 1], considérons le problème (P) suivant : Minimiser $\| g - f \|_2$ pour $f$ parcourant $S_{p_1}(I, \sigma)$.

Montrer que (P) se ramène à la minimisation de la fonction : $v \to {}^t v\, Q v - {}^t \beta v + \gamma$ où $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, ${}^t v$ et ${}^t \beta$ étant les vecteurs transposés de $v$ et $\beta$ respectivement, Q étant une matrice $(n+1, n+1)$. En tenant compte de la définition de la norme $\| . \|_2$ en déduire que la forme quadratique : $v \to {}^t v\, Q v$ est définie positive.

7° Montrer que ce minimum est unique, il sera noté $\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{v}_i\, C_i(x)$.

8° Montrer que ce minimum est donné effectivement comme solution d'un système linéaire (S) dont on donnera explicitement la matrice et le second membre.

9° Montrer qu'une matrice B à $p$ lignes et $p$ colonnes, d'éléments $(b_{ij})$ tels que pour tout $i = 1$ à $p$, $| b_{ii} | > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} | b_{ij} |$, est une matrice inversible; retrouver le résultat de 7°.

10° En remarquant que $\| \hat{f} \| = \max_{i = 1 \text{ à } n+1} | \hat{v}_i | = | \hat{v}_j |$, montrer que $\| \hat{f} \| \leqslant 3 \| g \|$. Pour cela, on utilisera l'équation $j$ du système (S).

11° Si on note $L_2 : g \to \hat{f}$, montrer que $L_2$ est linéaire, que vaut $L_2(f)$ pour $f \in S_{p_1}(I, \sigma)$ ?

En déduire que $\| g - \hat{f} \| \leqslant 4 \inf \{ \| g - f \| \quad | f \in S_{p_1}(I, \sigma) \}$.

12° Résoudre le problème (P) pour $g(x) = 3x^2$, $n = 3$ et $\sigma$ uniforme.